

Random Walk in Periodic Environment

Rédl István

III. éves BSc hallgató
Témavezető: Vető Bálint

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar

Nov 18, 2009

Tartalom

- 1 Bevezetés
 - Bevezetés - A modell
 - Bevezetés - NSZT és CHT
- 2 Az eredmény
- 3 Egy dimenziós eset
- 4 Általánosítás $d \geq 2$ esetre

Bevezetés - A modell

Általánosan: Random Walk in Random Environment (RWRE)

- 1 véletlen környezet (ω);
- 2 bolyongás: X_n Markov lánc, környezettől függő átmenetvalószínűségek;

'quenched' law, 'annealed' law (átlagolt)

A dolgozatban vizsgált modell: Random Walk in Periodic Environment (RWPE)

$d \geq 1$ dimenzióban; $\mathbb{Z}^d - n$

Rögzítünk egy $M := (M_1, \dots, M_d)$ periódust;

Átmenetvalószínűségek (*első szomszéd*)

$p_x(e) := P(X_{n+1} = x + e | X_n = x)$, ahol $x \in \mathbb{Z}^d$, $|e| = 1$

periodikusak, azaz $p_x(e) = p_{x+(k_1 M_1, k_2 M_2, \dots, k_d M_d)}(e)$, ahol

$k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}^d$.

NSZT és CHT

A bolyongás - kétféle Markov lánc

- X_n állapottere $\mathbb{Z}^d$
- Y_n állapottere $T := \mathbb{Z}^d / M$

X_n -ből megkaphatjuk Y_n -t és fordítva.

Ekvivalencia reláció $x \sim y$ azaz

$x = y + k_1 M_1 + k_2 M_2 + \dots + k_d M_d$, ahol $x \in \mathbb{Z}^d$, $y \in T$.

Feltevés: $p_x(e) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ and $\forall e \rightarrow X_n$ és Y_n irreducibilis
 Y_n stacionárius mértéke π

Egy segéd Markov lánc $Z_n := (Y_{n-1}, Y_n - Y_{n-1})$ a tórusz 'élein'
 definiálva $S := \mathbb{Z}^d / M \times \{e : |e| = 1\}$.

Z_n stacionárius mértéke $\pi_Z(x, e) = \pi(x)p_x(e)$

NSZT

Tétel

Tekintsük a $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Markov láncot, π_Z stacionárius mértékkel, valamint az X_n Markov láncot. Legyen

$$\nu := \mathbb{E}_{\pi_Z}(Z_1) = \sum_{z \in \Omega} \sum_{|e|=1} \pi(x) p_x(e) f((x, e)), \quad \text{ahol} \quad f((x, e)) = e.$$

Ekkor

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \nu, \quad P \left(\left\{ \omega : \frac{X_n}{n} \rightarrow \nu \right\} \right) = 1$$

Bizonyítás a *Markov láncokra vonatkozó Ergod tétel* segítségével.

A kulcs $X_n = \sum_{k=1}^n f(Z_k)$.

CHT

Tétel

Az $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Markov lánc esetén

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

Bizonyítás a *Markov láncokra vonatkozó CHT* következménye.

A dolgozat eredménye

Reverzibilitás X_n -re: $\{X_n\}_{n=0}^N \stackrel{d}{=} \{X_{N-n}\}_{n=0}^N$

Potenciál: $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ $\log \left(\frac{p_x(e)}{p_{x+e}(-e)} \right) = u(x) - u(x+e)$

A közeg lejtése:

$$\underline{g} := \left(\frac{1}{M_1} \log \prod_{i=0}^{M_1-1} \frac{p_{ie_1}(e_1)}{p_{(i+1)e_1}(-e_1)}, \frac{1}{M_2} \log \prod_{i=0}^{M_2-1} \frac{p_{ie_2}(e_2)}{p_{(i+1)e_2}(-e_2)}, \dots \right)$$

Emlékeztető: $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n}$

Tétel

*Tekintsük az $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ Markov láncot, és tegyük fel, hogy $\underline{g} \neq \underline{0}$.
 Ekkor $\langle \underline{g}, \underline{\nu} \rangle > 0$.*

Szemléletes példa

Tönkremenési probléma

Homogén eset, driftes bolyongás $\mathbb{Z}$ -n:

$$\begin{aligned} p &= P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i), \\ q &= 1 - p = P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Feltesszük, hogy $p > q$; legyen továbbá $\tau_{m_-} := \min\{k : X_k = m_-\}$

Tekintsük az $[m_-, m_+]$ intervallumot, ahol $m_- < 0 < m_+$

Keressük $Q_{m_-, m_+}(a) := P(\tau_{m_-} < \tau_{m_+} | X_0 = a)$, és most $a = 0$.

Doob féle opcionális megállási tétel megkönnyíti a számolást.

Tekintsük a $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingált, ahol $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$

Szemléletes példa - Számolás

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{\tau_{m_-} \wedge \tau_{m_+}}) &= \mathbb{E}(X_0) \\ Q_{m_-, m_+}(0) \left(\frac{q}{p}\right)^{m_-} + (1 - Q_{m_-, m_+}(0)) \left(\frac{q}{p}\right)^{m_+} &= 1 \\ Q_{m_-, m_+}(0) &= \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m_+}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{m_-} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m_+}}\end{aligned}$$

Nézzük az $m_+ \rightarrow \infty$ esetet, és vegyük a logaritmust

$$\begin{aligned}-\frac{1}{m_-} \lim_{m_+ \rightarrow \infty} \log Q_{m_-, m_+}(0) &= \frac{1}{m_-} \log \left(\frac{q}{p}\right)^{m_-} \\ &= \log \left(\frac{q}{p}\right) := C < 0\end{aligned}$$

RWPE $d=1$

Vagyis $Q_{m-, +\infty}(0) = e^C$, ahol $C := \log\left(\frac{q}{p}\right) < 0$ a $\underline{g}$ 'emelkedése'

RWPE esetén

Állítás

Tekintsük az $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Markov láncot $d = 1$ esetben. Legyen $C(M) := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log \frac{q_{j+1}}{p_j}$ úgy, hogy $C(M) < 0$. Ekkor

$$P(\min_{k \in \mathbb{N}} X_k < -n | X_0 = 0) = e^{C(M)n} \rightarrow 0, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

A bizonyításnál alkalmazható az alábbi martingál

$$f(k) := 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^j \frac{q_i}{p_i}, \quad Z_n := f(X_n)$$

A határértéket az M periódus mentén vesszük.

Magasabb dimenzióban

Fontos a potenciál aszimptotikus lejtésének iránya és a $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n}$ közötti kapcsolat

Tekintsük a közeg lejtésére bevezetett $\underline{g}$ vektorra merőleges $I_{\underline{g}} := \{\underline{x} : \langle \underline{x}, \underline{g} \rangle = 0, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2\}$ vonalat. Valamint a $g_o := \{c\underline{g}, \quad c \in \mathbb{R}\}$ vonal mentén vegyük az $I_{\underline{g}}^{\pm k} := \{\underline{x} : \langle \underline{x}, \underline{g} \rangle = \pm kc, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2\}$ eltoltjait. Ezek egyértelműen meghatározzák az $m_{\pm k}$ szintvonalakat

Definiáljuk a $\tau_k := \min\{n : X_n \in m_k\}$ első elérési időket.

A bizonyítás gondolatmenete - vázlat

Állítás

Tekintsük az X_n reverzibilis Markov láncot $d = 2$ esetben. Ekkor

$$P(X_n \in m_{-k}) = e^{C_2 k} \rightarrow 0, \quad \text{amint } k \rightarrow \infty,$$

ahol $C_2 < 0$ az M periódus paramétereitől függő konstans.

A reverzibilitásból és a periodicitásból $\rightarrow$ Az egyes *szintvonalak* mentén a potenciál lehetséges értékei, és azok különbségei véges számúak. Tfh. az $a \in m_0$ *központi szintvonalról* indulunk

Cél:

$$P^{-k} := P(\omega : \tau_{-k} < \tau_k | X_0 = a \in m_0) < \\ P(\omega : \tau_{-k} > \tau_k | X_0 = a \in m_0) =: P^{+k}$$

bizonyítás vázlat

Miért jó? $\rightarrow$ Egy véletlen idejű bolyongás az $m_{\pm k}$ szintvonalakon, u.i. $\tau_{+k} \wedge \tau_{-k}$ farokeloszlása exponenciálisan lecseng.

Becsléseket konstruálunk kanonikus módon, a *kedvezőtlen* m_{-k} szintvonalra menő utakat felülbecsüljük a *kedvező* m_{+k} szintvonalra menő utakkal.

$$P(\omega_{a \rightarrow c}) \leq e^{u(a)-u(c)} C_\gamma^2 P(\bar{\omega}_{c \rightarrow a}),$$

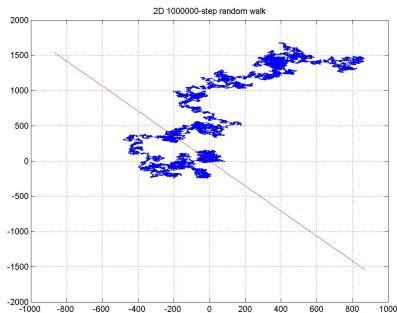
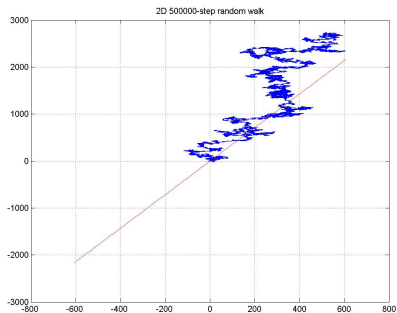
ahol C_γ^2 egy konstrukciótól függő konstans. Vagyis $k \rightarrow \infty$ esetben elérhetjük

$$P(\omega_{a \rightarrow c}) < q P(\bar{\omega}_{c \rightarrow a}),$$

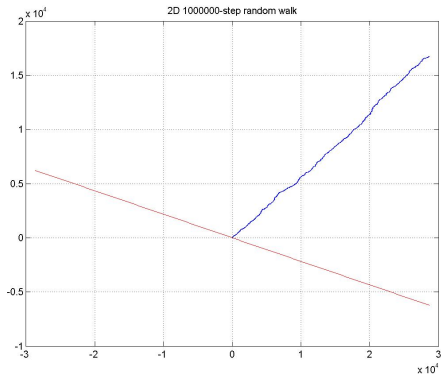
ahol $\omega_{a \rightarrow c} : m_0 \rightarrow m_{-k}$ út, $\bar{\omega}_{c \rightarrow a}$ ennek a megfordítottja és $q < 1$ *univerzális*.

A bizonyítás általánosítható magasabb dimenzióban.

Szimulációs eredmény I.



Szimulációs eredmény II.



Vége

Köszönöm a figyelmet!