

Bikoherencia rutin fejlesztése és fúziós plazmadiagnosztikai alkalmazása

Horváth László

Bsc II.évfolyam, BME TTK

Témavezetők:

Dr. Pokol Gergő

Papp Gergely

BME Nukleáris Technikai Intézet

2010. november 17.



Tartalom

- A bikoherencia definíciója
- A fejlesztett rutin és alaptesztelése
- A bikoherencia szignifikancia szintjének analitikus vizsgálata
- Tesztek összehasonlítása a szignifikancia szintre kapott eredménnyel
- Fúziós plazmadiagnosztikai alkalmazás

A bikoherencia definíciója

- Amennyiben a jelben jelenlévő három hullám frekvenciáira és fázisaira igaz a következő két egyenlet:

$$f_1 + f_2 = f_3 \quad \text{és} \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \text{konst.}$$

akkor a hullámok között fáziscsatolás áll fenn.

- Elsőként a bispektrumot definiálom:

$$B(f_1, f_2) = E[X(f_1) \cdot X(f_2) \cdot X^*(f_1 + f_2)]$$

ahol $X(f)$ az $x(t)$ függvény Fourier-transzformáltja, E a várhatóérték képzést, a $*$ a komplex konjugáltat jelöli.

- A bikoherenciát normálással kapjuk:

$$b(f_1, f_2) = \frac{|B(f_1, f_2)|}{\sqrt{E[|X(f_1) \cdot X(f_2)|^2] E[|X(f_1 + f_2)|^2]}}$$

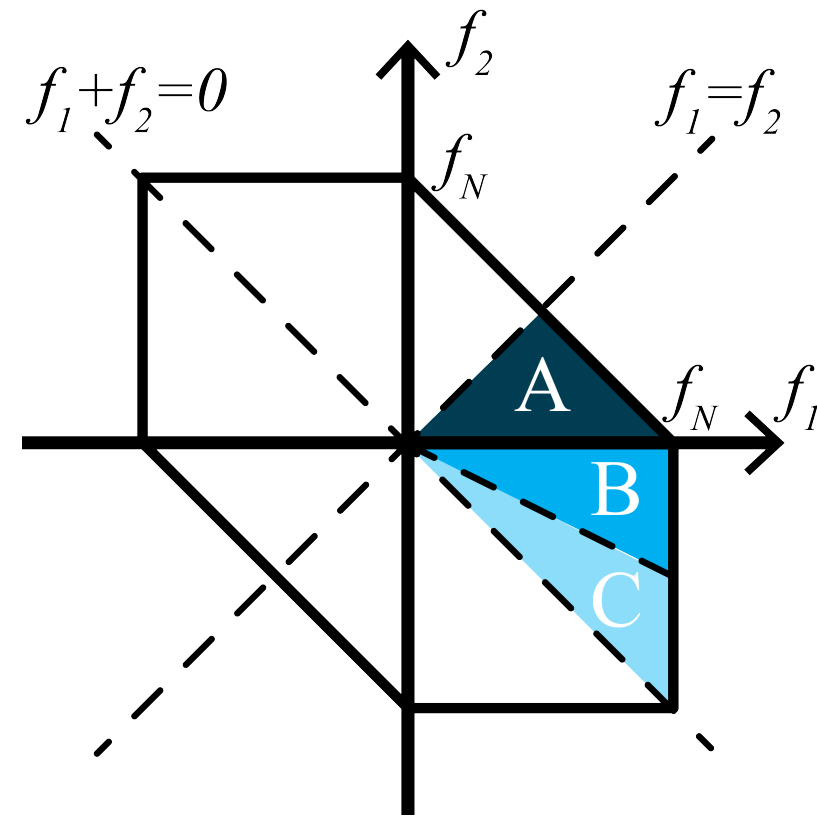
Az ábrázolt tartomány

- Nyquist-frekvencia (f_N):
 - $-f_N \leq f_1, f_2 \leq f_N$ és $-f_N \leq f_1 + f_2 \leq f_N$
- A bispektrum definíciója és az $X(-f) = X^*(f)$ összefüggés alapján:
 - $B(f_1, f_2) = B(f_2, f_1) = B^*(-f_1, -f_2)$
 - $B(f_1, f_2) = B^*(f_1 + f_2, -f_2)$

B $\rightarrow$ A

- $B(f_1, f_2) = B^*(f_1 + f_2, -f_1)$

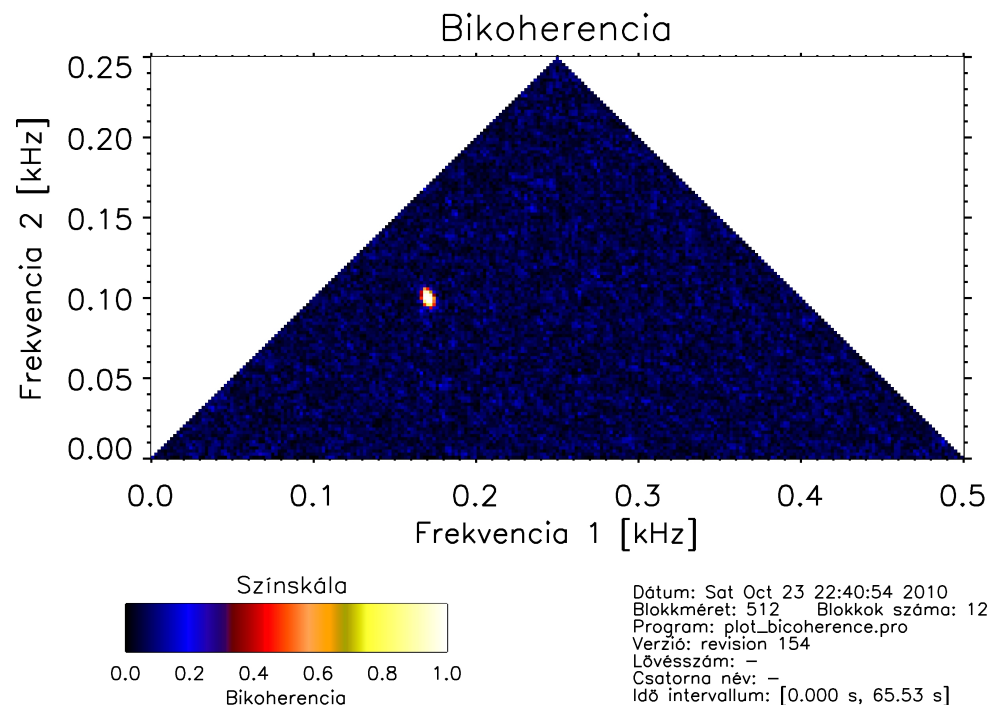
C $\rightarrow$ A



A bikoherencia rutin

- A rutint IDL nyelven írtam.
- Kiszámolja a bikoherencia mátrixot és ábrázolja.
- A bikoherencia mellett a jel autospektrumát is megjeleníti.

- Blokkokra bontás
- Átlag levonása a jelből
- Fourier-transzformáció
- Bispektrum számítása
- Normálás



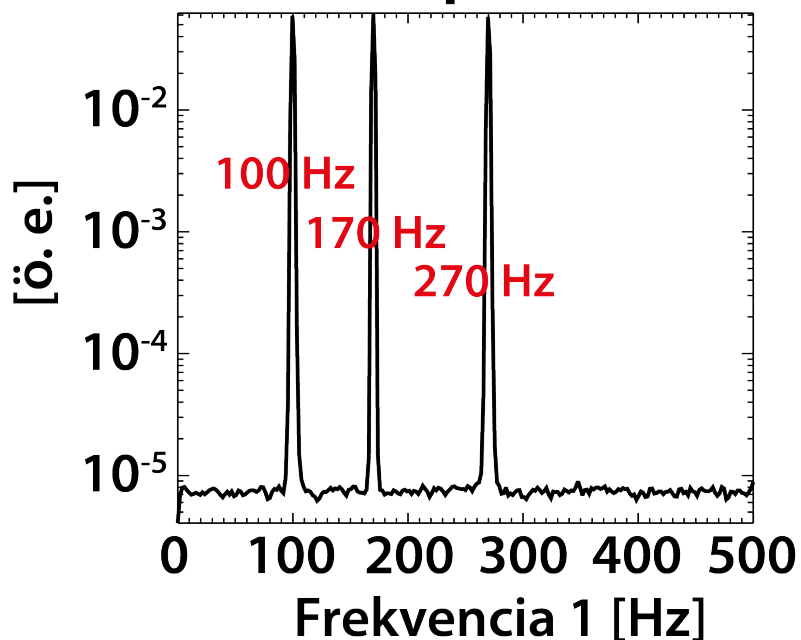
A bikoherencia rutin alapteresztelése

Harmonikus oszcillátorok összege

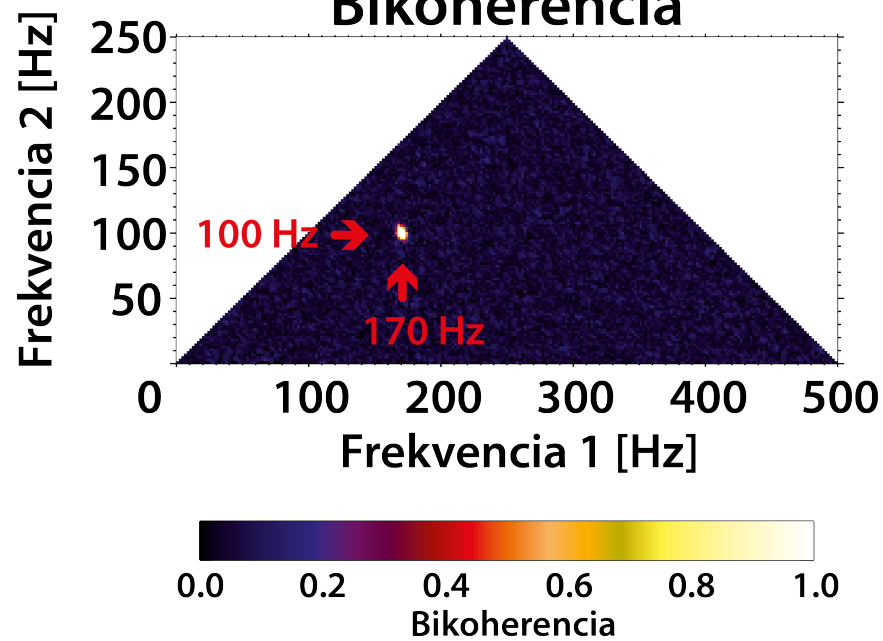
- A tesztelést három harmonikus oszcillátor összegeként generált jel vizsgálatával kezdtem. Az oszcillátorok frekvenciái a következők voltak:

$$f_a = 100 \text{ Hz}, \quad f_b = 170 \text{ Hz}, \quad f_c = f_a + f_b = 270 \text{ Hz}$$

Auto-spektrum

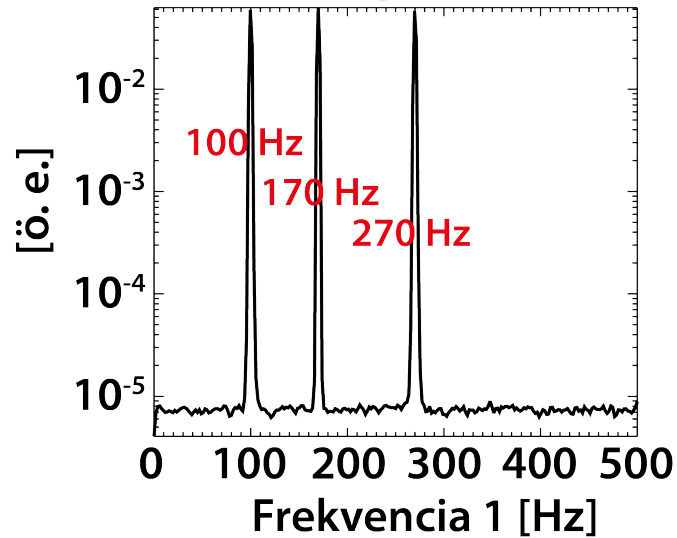


Bikoherencia

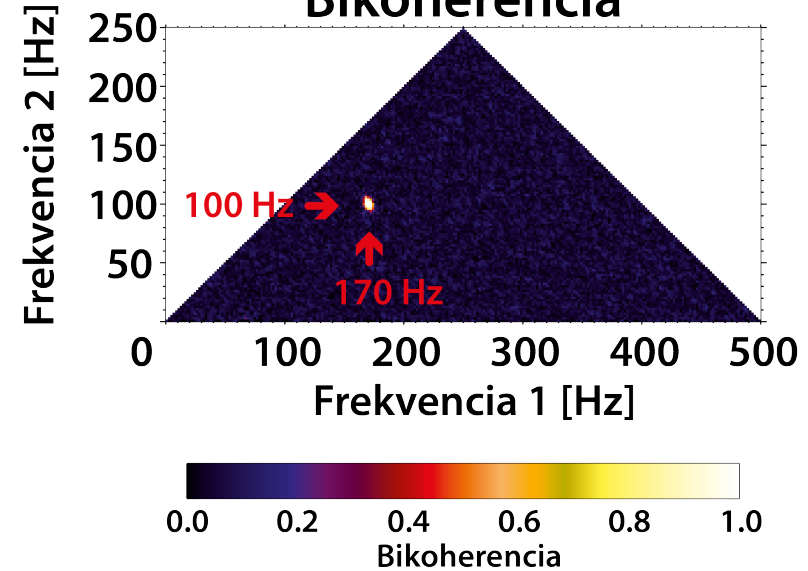


Fáziscsatolt oszcillátorok

Auto-spektrum

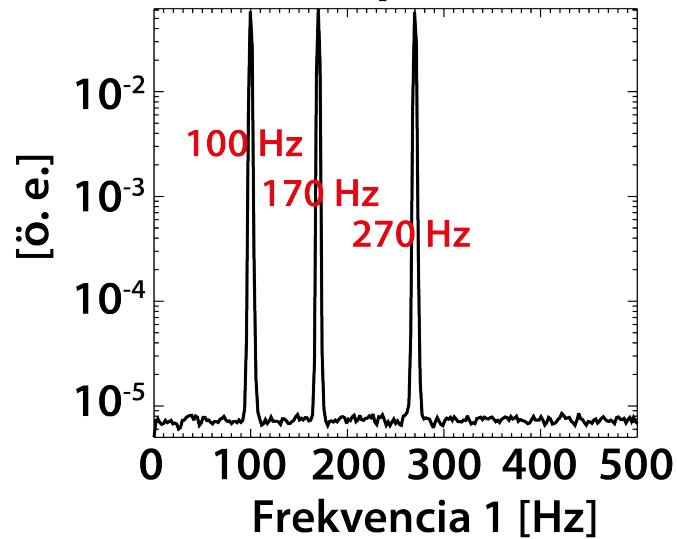


Bikoherencia

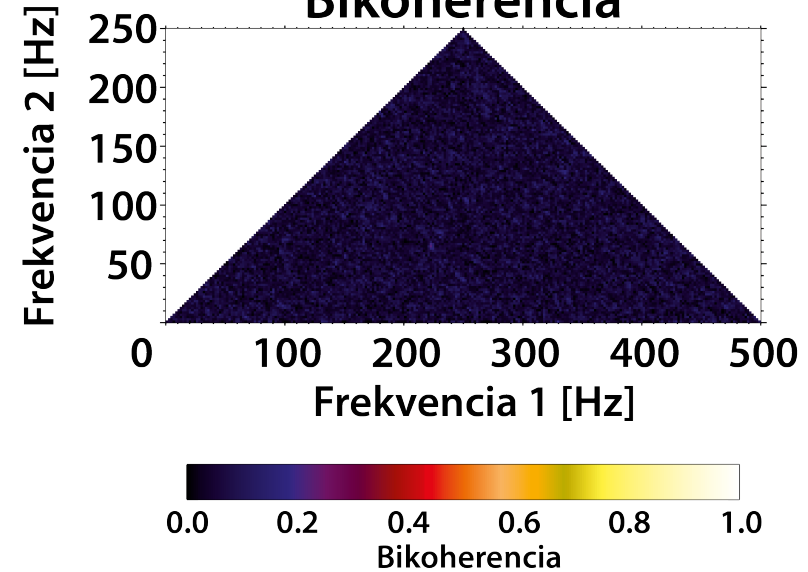


Csatolatlan oszcillátorok

Auto-spektrum



Bikoherencia



Harmonikusok szorzataként generált jel

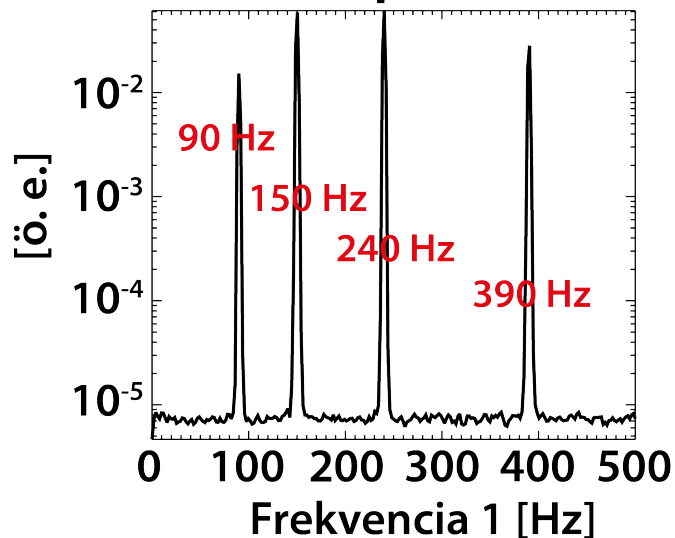
- Az előzőekhez hasonló jelet generáltam, a következő függvény alapján:

$$x(t) = \cos(2\pi f_a t + \varphi_a) + \cos(2\pi f_b t + \varphi_b) + \cos(2\pi f_a t + \varphi_a) \cos(2\pi f_b t + \varphi_b) + 0.5 \cos[2\pi(f_a + f_b)t + \varphi_c]$$

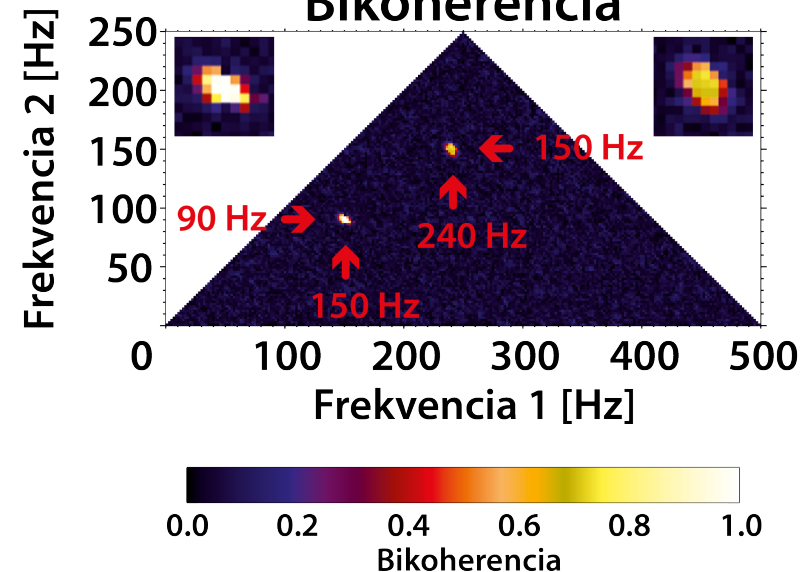
$$\cos(2\pi f_a t + \varphi_a) \cos(2\pi f_b t + \varphi_b) = 0.5 \cos[2\pi(f_a + f_b)t + (\varphi_a + \varphi_b)] + 0.5 \cos[2\pi(f_a - f_b)t + (\varphi_a - \varphi_b)]$$

- A frekvenciák a következők: $f_a = 150$ Hz, $f_b = 240$ Hz
- A φ_a , φ_b , φ_c fázisok egymástól függetlenek.

Auto-spektrum

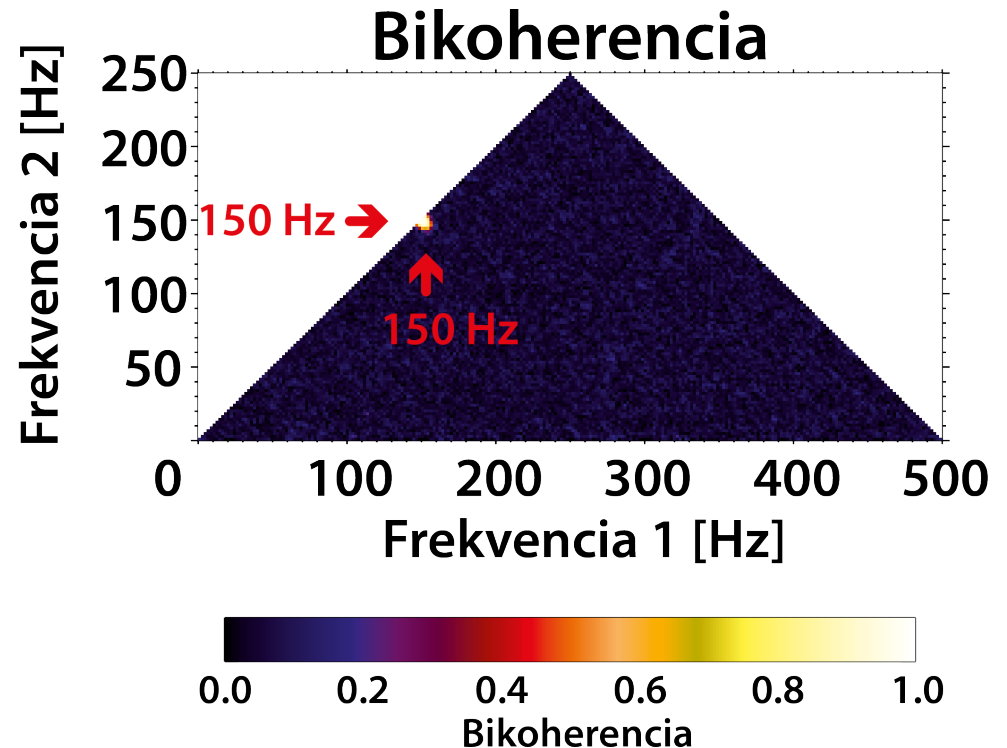
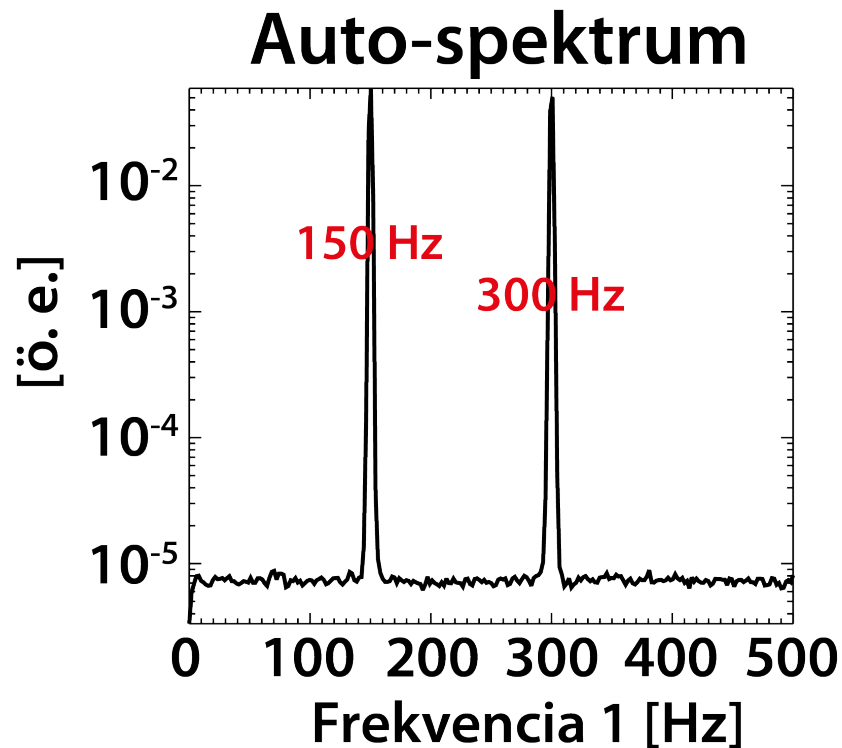


Bikoherencia



Felharmonikusok

- A jel 150 Hz és 300 Hz frekvenciájú fáziscsatolt oszcillátorok összege.
- A $(150\text{ Hz}, 150\text{ Hz})$ pontban bikoherencia látható.
- Megállapítható, hogy f frekvencia felharmonikusának megjelenését az (f, f) pontban kapott bikoherencia mutatja.



A bikoherencia analitikus vizsgálata

Három harmonikus oszcillátor összegére vizsgáltam a bikoherenciát.

- Az oszcillátorok frekvenciái: f_a , f_b és $f_c = f_a + f_b$
- Fázisaik: φ_a , φ_b és φ_c

A valóságban a jelkomponensek frekvenciái ingadozhatnak, ezt úgy modelleztem, hogy az oszcillátorok fázisát időfüggővé tettem:

$$x_q(t) = \exp\{i[\omega_q t + \varphi_q(t)]\},$$

ahol $\omega_q = 2\pi f_q$, $q = \{a, b, c\}$

A fázis linearizálása

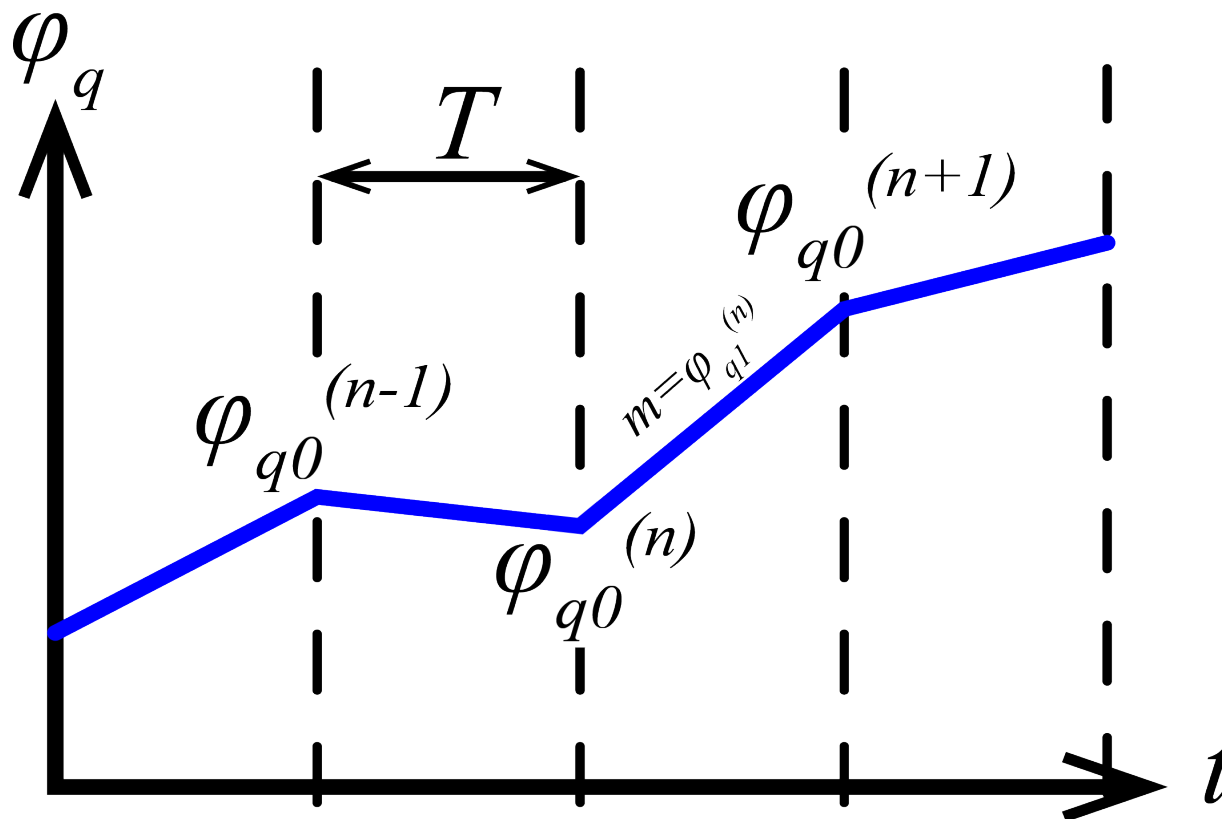
A fázis lassan változik, ezért lineárisan közelíthető:

$$\varphi_q(t) \approx \varphi_{q0} + \varphi_{q1} t,$$

φ_{q1} : blokkonként változik

$$\varphi_{q0}^{(n+1)} = \varphi_{q0}^{(n)} + \varphi_{q1}^{(n)} T,$$

n : blokkok sorszáma, T : blokk hossza



A bikoherencia analitikus vizsgálata

Összadva a három oszcillátort a következő függvényt kaptam:

$$x(t) = \exp\{i[(\omega_a + \varphi_{aI})t + \varphi_{a0}]\} + \exp\{i[(\omega_b + \varphi_{bI})t + \varphi_{b0}]\} + \\ + \exp\{i[(\omega_a + \omega_b + \varphi_{cI})t + \varphi_{c0}]\}$$

Fourier-transzformáció után:

$$X(\omega) = \exp(i\varphi_{a0}) \delta(\omega_a - \omega + \varphi_{aI}) + \exp(i\varphi_{b0}) \delta(\omega_b - \omega + \varphi_{bI}) + \\ + \exp(i\varphi_{c0}) \delta(\omega_a + \omega_b - \omega + \varphi_{cI})$$

Feltéve, hogy az oszcillátorok frekvenciái $\Delta\omega$ -nél távolabb vannak egymástól és $\Delta\omega/2 \leq \varphi_{aI}, \varphi_{bI}, \varphi_{cI} \leq \Delta\omega/2$. Egy blokk bispektruma:

$$B\left(\omega_a \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_b \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right) = e^{i(\varphi_{a0} + \varphi_{b0} - \varphi_{c0})}$$

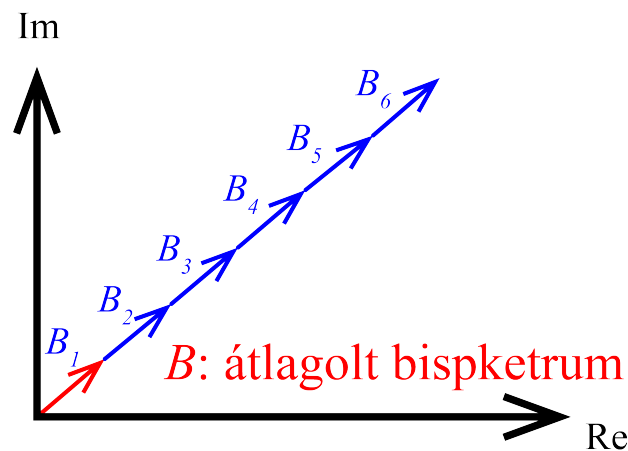
A bikoherencia analitikus vizsgálata

$$B\left(\omega_a \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_b \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right) = e^{i(\varphi_{a0} + \varphi_{b0} - \varphi_{c0})}$$

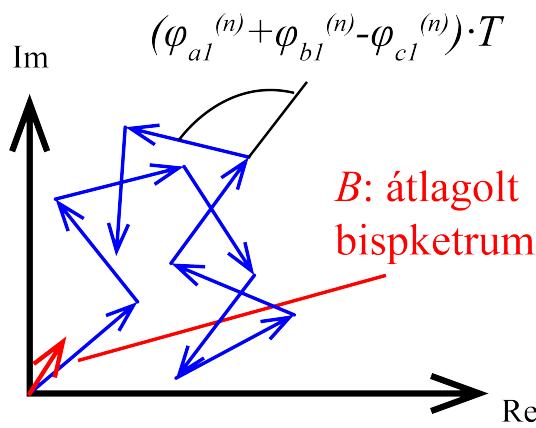
Fáziscsatolás áll fenn amennyiben a jelben jelenlévő három hullám frekvenciáira és fázisaira igaz a következő két egyenlet:

$$f_1 + f_2 = f_3 \quad \text{és} \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \text{konst.}$$

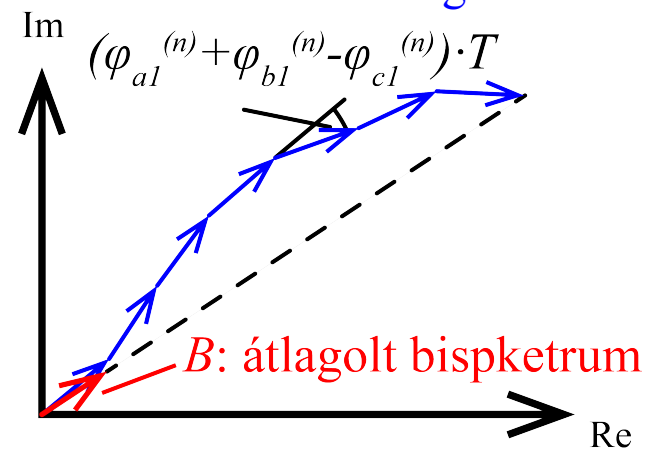
Csatolt rendszer



Csatolatlan rendszer,
nagy frekvencia ingadozás



Csatolatlan rendszer,
kis frekvencia ingadozás



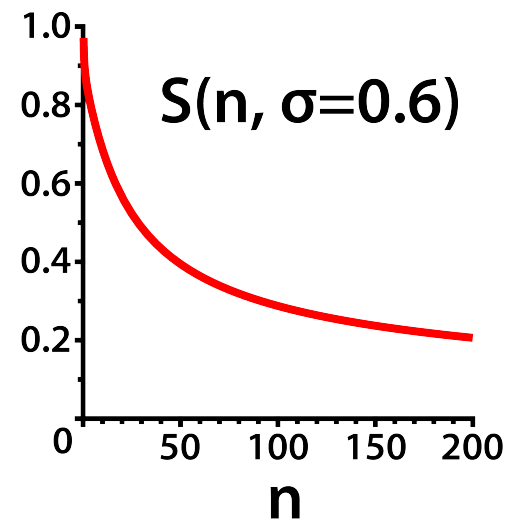
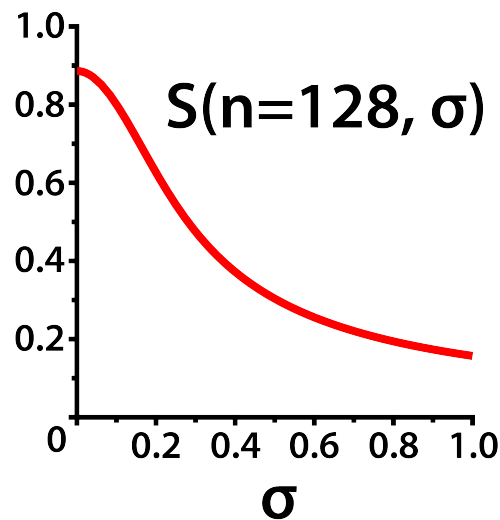
Síkbeli bolyongási modell

Modellemben $\varphi_{aI}, \varphi_{bI}, \varphi_{cI} \sim N(0, \sigma^2)$ egymástól független véletlen szám.

A bikoherencia szignifikancia szintje:

$$S(n, \sigma) \simeq \frac{1}{n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha} n - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} \alpha^n}$$

ahol $\alpha = \exp(-\sigma^2/2)$, n a lépések száma.



Tesztek összehasonlítása az analitikus levezetéssel

Megvizsgáltam, hogy csatolatlan oszcillátorok esetén mekkora átlagolással csökken le a bikoherencia az elméleti várható értékére, azaz 0 -ra.

- 128×512 adatpontból álló jel, tehát $n=128$
- csatolatlan oszcillátorok
- $\varphi_{aI}, \varphi_{bI}, \varphi_{cI} \sim N(0, \sigma^2)$
- adott n és σ mellett 500 db átlagolás
- átlagolás eredménye az adott σ melletti várható érték

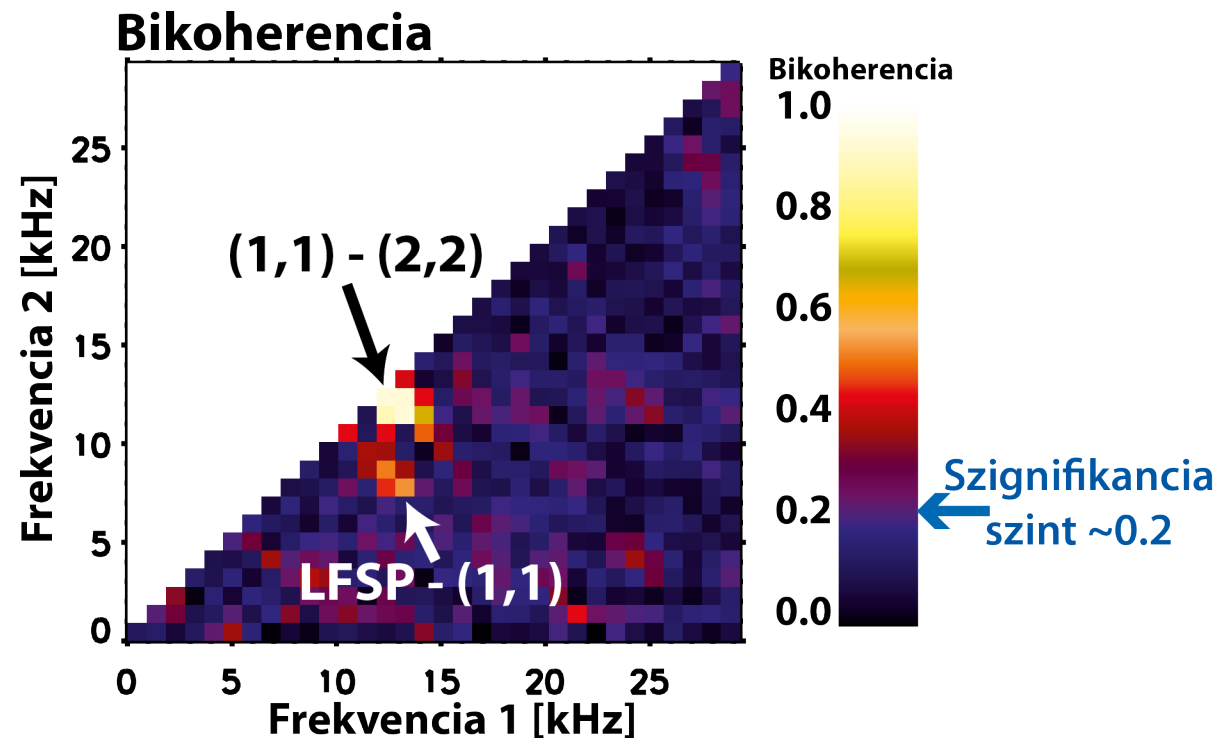
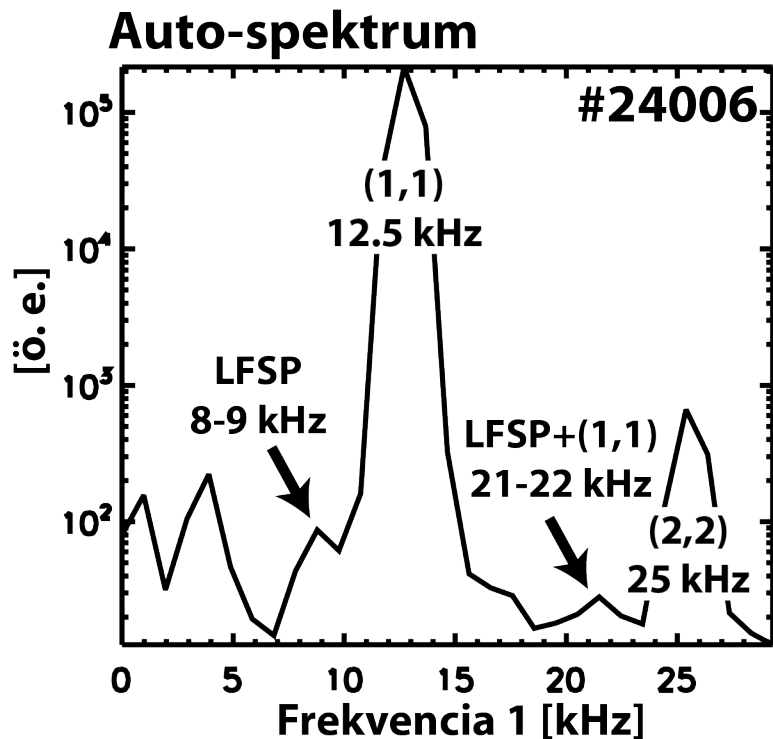
σ	Bikoherencia maximumok átlaga	Bolyongás várható értéke analitikus levezetés alapján	Bolyongás várható értéke numerikus számítás alapján
0,3	$0,57 \pm 0,06$	$0,52 \pm 0,27$	$0,55 \pm 0,21$
0,6	$0,32 \pm 0,12$	$0,29 \pm 0,15$	$0,29 \pm 0,14$
0,9	$0,26 \pm 0,07$	$0,20 \pm 0,10$	$0,20 \pm 0,10$

A bikoherencia fúziós plazmadiagnosztikai alkalmazása

- Az ASDEX Upgrade tokamakon megfigyelt fűrészfog oszcillációt elemeztem.
- A jeleket lágy röntgen diagnosztikával detektálták.
- A bikoherenciával vizsgáltam az összeomlás prekursor szakaszában megjelenő oszcillációk közti kölcsönhatást.
- Korábban megfigyelték, hogy a fő prekursor mellett további oszcillációk is megjelennek a prekursor szakaszban, melyek fontosak az összeomlás létrejöttében. [*Igochine NF 2008*]
- Az egyik oszcilláció az ún. LFSP (Low Frequency Sawtooth Precursor)
- Sávteljesítmény-korrelációs technikával már sikerült kölcsönhatást kimutatni a fő prekursor és az LFSP között [*Papp EPS-P1.157 2009*].



A bikoherencia fúziós plazmadiagnosztikai alkalmazása



Idő intervallum: [1.61 s, 1.64 s]

Összeomlás ideje: 1.6537

Összefoglalás

- Bikoherencia rutin fejlesztése.
- Megállapítottam a bikoherencia szignifikancia szintjét.
- Bikoherenciát mutattam ki az AUG tokamakon megfigyelt fűrészfog összeomlás prekursor szakaszában megjelenő oszcillációk között.

Kitekintés

- Nemlineáris rendszerek modellezése, majd bikoherenciával történő vizsgálata.

