

Müntz-típusú tételek súlyozott $L^2(0, \infty)$ terekben multiplicitással

Markó Zoltán, matematika BSc III. évfolyam

2010. november 14.

Konzulens: G. Horváth Ágota, BME Analízis Tanszék

Bevezetés, definíciók

Klasszikus Müntz-típusú tételek

Súlyozott $L^2(0, \infty)$ terek

Multiplicitással ellátott sorozatok

Eddigi eredmények

Új eredmények

1. tétel

2. tétel

Következmények

Összefoglalás, kitekintés

Bevezetés, definíciók

Approximációelmélet: függvények közelítése „szebb” tulajdonságú függvényekkel.

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $S \subset X$ altér. S *sűrű* X -ben, ha minden $f \in X$, $\varepsilon > 0$ esetén létezik $f_\varepsilon \in S$, hogy

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Ha S sűrű X -ben, akkor az elemeivel lehet approximálni.

Alapkérdés: Adott X függvénytér esetén mikor lesz sűrű egy $S \subset X$ altér? Sűrűségre vonatkozó tételek: Müntz-típusú tételek.

Klasszikus tételek

Weierstrass approximációs tétele: a polinomok sűrű alterét alkotják $C[0, 1]$ -nek. Ez a $\text{span}\{t^k \mid k = 0, 1, \dots\}$ rendszerre vonatkozó állítás.

Tovább lépés: $\text{span}\{t^{a_k} \mid k = 0, 1, \dots\}$ rendszer sűrűsége $C[0, 1]$ -en, ahol $0 = a_0 < a_1 < \dots$ növekvő pozitív sorozat: Bernstein sejtését Ch. H. Müntz igazolta 1914-ben:

A. Tétel (Müntz). Legyen $0 = a_0 < a_1 < \dots$, valós számok növekvő sorozata. Ekkor $\text{span}\{t^{a_k} \mid k = 0, 1, \dots\}$ pontosan akkor sűrű $C[0, 1]$ -en, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty.$$

Bizonyítások, általánosítások: ld. pl. J. M. Almira (2007).

$C[0, 1]$, $L^p(0, 1)$: pl. P. Borwein, T. Erdélyi, W. B. Johnson, 2001.

Véges sok $\{t^{a_k}\}$ lineáris kombinációjaként felírható függvények:
Müntz-polinomok (pl. Ú. F. Stefánsson, 2009).

Végtelen intervallumon a teret súlyoznunk kell. A továbbiakban a $(0, \infty)$ intervallumon tekintünk Müntz-típusú tételeket.

40-es évek: $\{t^{a_k} e^{-t}\}$ rendszer vizsgálata (pl. W. H. J. Fuchs, R. P. Boas, H. Pollard).

B. Tétel (Fuchs). *Legyenek $a_0 < a_1 < \dots$ olyan pozitív számok, melyekre $a_{k+1} - a_k > c > 0$ teljesül valamely c valós számra. Legyen továbbá*

$$\Psi(r) = \begin{cases} \frac{2}{a_1}, & \text{ha } r < a_1; \\ \sum_{a_k \leq r} \frac{2}{a_k}, & \text{ha } a_1 \leq r. \end{cases}$$

Ekkor az $\{e^{-t} t^{a_k}\}$ rendszer pontosan akkor teljes $L^2(0, \infty)$ -en, ha

$$\int_1^\infty \frac{\Psi(r)}{r^2} dr = \infty.$$

Általánosabb példa: Malliavin (1955).

Súlyozott $L^2(0, \infty)$ terek

A dolgozatban $w(t)$ súlyfüggvénnyel súlyozott $L^2(0, \infty)$ terekben igazolunk Müntz-típusú tételeket.

Súlyozott $L^2(0, \infty)$ tér:

$$L_w^2(0, \infty) := \{f \mid fw \in L^2(0, \infty)\},$$

a norma:

$$\|f\|_{2,w} := \|fw\|_{2,(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty f^2(t)w^2(t) \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$L_w^2(0, \infty)$ Hilbert-tér.

1. Definíció. [2] $w(t)$ súlyfüggvény megengedett $[0, \infty)$ -en, ha $w(t) = \nu(t)\mu(t)$ alakú, ahol $\nu(t)$ és $\mu(t)$ pozitív és folytonos függvények $[0, \infty)$ -en, továbbá

- ▶ w^2 momentumai végesek;
- ▶ létezik γ függvény $[0, \infty)$ -en, mely $\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\gamma_k}$ alakban írható, ahol $c_k > 0$ minden k -ra, $0 \leq \gamma_0 < \gamma_1 < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \infty$,
létezik $C_0 > 0$, hogy minden $t > C_0$ esetén $\frac{1}{w^2} \leq \gamma(t)$,
valamint létezik $C > 1$, melyre $\int_0^{\infty} \gamma\left(\frac{t}{C}\right) w^2(t) dt < \infty$;
- ▶ $\mu(t)$ -re igaz, hogy $\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) \in (0, \infty)$;
- ▶ létezik $a > 0$ egész, hogy $\int_0^1 \left(\frac{t^a - 1}{\nu(t)}\right)^2 dt < \infty$.

Ezzel helyettesíthető a szokásos konvexitási feltétel (ld. pl. Malliavin, Zikkos, 2007).

1. Példa. $w(t) = t^\beta e^{-Dt^\alpha}$, ahol $\beta > -\frac{1}{2}$, és $\alpha > 0$, megengedett súlyfüggvény, ugyanis momentumai végesek, $\gamma(t) = e^{3Dt^\alpha}$ pedig teljesíti a feltételeket.

Ha $\beta = 0$, és $D = \alpha = 1$, akkor a $w(t) = e^{-t}$ esetet kapjuk: Fuchs tétele.

Ha $\beta > -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$ és $\alpha = 1$, akkor $w^2(t) = t^{2\beta} e^{-t}$ egy Laguerre-súly.

Ha $\beta = 0$, $D > 0$ és $\alpha > 1$, akkor $w(t) = e^{-Dt^\alpha}$ egy Freud-súly.

Ha most $w(t) = (4 + \sin t)t^\beta \prod_{k=1}^n e^{-D_k t^{\alpha_k}}$, ahol $\beta > -\frac{1}{2}$, illetve $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, és $D_n > 0$, akkor w megengedett, és $\gamma(t) = e^{Dt^{\alpha_n}}$ jó választás a feltételek teljesítésére, ha D elég nagy. Speciálisan, ha $\beta = n = 1$, $D_1 = \alpha_1 = 1$, akkor $w(t) = t(4 + \sin t)e^{-t}$. Ez esetben Zikkos tétele nem használható.

2. Definíció. [2] Legyen w olyan súlyfüggvény, hogy w^2 momentumai végesek. Ekkor azt mondjuk, hogy w „normális”, ha a w^2 -hez tartozó n . ortogonális polinom legnagyobb $x_{1,n}$ gyökére teljesül, hogy

$$x_{1,n} \leq e^{cn},$$

ahol $c = c(w)$ n -től független pozitív konstans.

Multiplicitással ellátott sorozatok

Fuchs, Malliavin és G. Horváth Ágota: $\{t^{a_k}\}$ rendszer, $\mathbf{A} = \{a_k\}$ pozitív, növekvő sorozat, $\exists c > 0$, amire $a_{n+1} - a_n \geq c$.

G.V. Badalyan, A. F. Leontev, X. Yang, E. Zikkos: *multiplicitással rendelkező sorozatok*.

3. Definíció. [4] $\{a_n\}$ valós sorozat az $\mathbf{L}(c, D)$ osztályba tartozik, ha $\{a_n\}$ valós növekvő, pozitív sorozat, és

► létezik $c > 0$, hogy

$$a_{n+1} - a_n \geq c,$$

minden $n \geq 1$ -re, és

► létezik $D \geq 0$, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = D.$$

4. Definíció. [4] Legyen $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, és α, β pozitív valós számok, melyekre $\alpha + \beta < 1$ teljesül. Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{B} = \{b_n\}$ pozitív valós sorozat (nem feltétlenül növekvő sorrendben) az $\mathbf{A}_{\alpha, \beta}$ osztályba tartozik, ha

► minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$b_n \in \{z \mid |z - a_n| \leq a_n^\alpha\},$$

vagyis b_n a_n -nek a_n^α sugarú zárt környezetén belül van, és

► minden $m \neq n$ indexre a következő két állítás közül az egyik igaz:

$$b_m = b_n \text{ vagy } |b_m - b_n| \geq \max \left\{ e^{-a_m^\beta}, e^{-a_n^\beta} \right\}.$$

$\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}: \{b_n\} (\lambda, \mu)$ átrendezése.

2. Példa. [4] Legyen

$$\lambda_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n^2}{4} + \frac{4}{n^2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ekkor $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ a (λ, μ) átrendezettje egy $\mathbb{N}$ -ből definiált $\mathbf{A}_{\alpha, \beta}$ -beli sorozatnak. Emellett

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0,$$

illetve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty.$$

Amivel én foglalkozom: az

$$S := \text{span} \{ t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \dots, \mu_k - 1 \}_{k=1}^{\infty}$$

rendszer sűrűsége $L_w^2(0, \infty)$ -n.

5. Definíció. Legyen $\mathbf{A} = \{a_k\}$ pozitív, növekvő sorozat. Definiáljuk ekkor a következő $m(r)$ és $\psi(r)$ függvényeket:

$$m_{\mathbf{A}}(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < a_1; \\ \sum_{a_k \leq r} \frac{1}{a_k}, & \text{ha } a_1 \leq r, \end{cases}$$

illetve

$$\Psi_{\mathbf{A}}(r) = e^{2m_{\mathbf{A}}(r)}.$$

$r < a_1$ esetén helyenként $m_{\mathbf{A}}(r) = \frac{1}{a_1}$ szerepel (pl. a B. tétel, [2]).

$\{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha,\beta}$ sorozat esetén: legyen $\{b_n\}$ (λ, μ) átrendezettje
 $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$. Ekkor

$$m_\Lambda(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < \lambda_1; \\ \sum_{\lambda_k \leq r} \frac{\mu_k}{\lambda_k}, & \text{ha } \lambda_1 \leq r, \end{cases}$$

illetve

$$\Psi_\Lambda(r) = e^{2m_\Lambda(r)}.$$

6. Definíció. Legyen w pozitív folytonos súlyfüggvény, melyre teljesül, hogy w^2 momentumai végesek. Ekkor definiáljuk $\varphi(x)$ és $K(x)$ függvényeket a következőképpen:

$$\varphi(x) = \left(\int_0^\infty t^{2x} w^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2x}} = (K(x))^{\frac{1}{2x}}, \quad x > 0.$$

Eddigi eredmények

C. Tétel. [2] Legyen w megengedett és normális súlyfüggvény $[0, \infty)$ -en, $\mathbf{A} = \{a_k\}$ növekvő sorozat, melyre létezik $c > 0$, hogy $a_{k+1} - a_k > c$. Ha létezik monoton növekvő f függvény $[0, \infty)$ -en, amelyre teljesül, hogy

▶ minden $0 < x \leq r$ esetén

$$x \ln \frac{\Psi_{\mathbf{A}}(r)}{\varphi(x)} \leq f(r),$$

▶ illetve

$$\int_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2} dr < \infty,$$

akkor $\text{span} \{t^{a_k}\}$ nem sűrű $L_w^2(0, \infty)$ -n.

D. Tétel. [2] Legyen w pozitív és folytonos $(0, \infty)$ -en úgy, hogy w^2 momentumai végesek, $\mathbf{A} = \{a_k\}$ monoton növekvő pozitív sorozat, melyre teljesül, hogy létezik $d > 0$, hogy $a_{k+1} - a_k > d$. Ha van monoton növekvő h függvény $[0, \infty)$ -en, melyre

- ▶ létezik $0 < C, D$, hogy $C < \frac{h(r)}{h(r_1)} < D$, amint $\frac{1}{2} \leq \frac{r}{r_1} \leq 2$;
- ▶ létezik $\alpha, C, c > 0$, hogy minden $0 < x \leq r$ esetén

$$0 < h(r) \leq C^{\frac{1}{\alpha}} \frac{cx}{\varphi^\alpha(x)} \Psi_{\mathbf{A}}^\alpha(r);$$

- ▶ valamint

$$\int_1^\infty \frac{h(r)}{r^2} dr = \infty,$$

akkor $\text{span} \{t^{a_k}\}$ sűrű $L_w^2(0, \infty)$ -en.

Új eredmények

1. Tétel. Legyen w megengedett és normális súlyfüggvény $[0, \infty)$ -en, $\mathbf{A} = \{a_k\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha, \beta}$, melynek (λ, μ) átrendezettje $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$. Ha létezik monoton növekvő f függvény $[0, \infty)$ -en, amelyre teljesül, hogy

► minden $0 < x \leq r$ esetén

$$x \ln \frac{\Psi_{\Lambda}(r)}{\varphi(x)} \leq f(r),$$

► illetve

$$\int_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2} dr < \infty,$$

akkor $S = \text{span} \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \dots, \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$ nem sűrű $L_w^2(0, \infty)$ -n.

A bizonyításhoz szükséges eszközök:

E. Tétel. X Banach-tér esetén $\text{span} \{h_n\} \subset X$ pontosan akkor nem sűrű, ha létezik nemtriviális $\psi \in X^*$ korlátos lineáris funkcionál, mely eltűnik $\{h_n\}$ elemein, azaz $\psi(h_n) = 0$.

Ez a Hahn-Banach-tétel következménye (pl. [3] 115. oldal).

1. Lemma. [2] Legyen $a > 0$ egész. Ha w^2 pozitív, folytonos normális súlyfüggvény $(0, \infty)$ -n, és momentumai végesek, akkor $z = x + iy$ jelölés mellett létezik olyan $b(z)$ függvény, hogy $\frac{1}{b(z)}$ reguláris $\Re z = x > -a$ -n, és $\Re z \geq -\frac{1}{2}$ esetén

$$\sqrt{\frac{K(x+a)}{K(x)}} \leq |b(z)|.$$

Félsíkon reguláris függvények

Sűrűség $\Leftrightarrow$ valamely félsíkon reguláris, speciális növekedési tulajdonsággal rendelkező függvények létezése.

A kettő közti kapcsolatot az alábbi függvények vizsgálata teremti:

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{a_n + z} e^{\frac{2z}{a_n}}, \quad \Re z = x \geq 0.$$

$G(z)$ -re vonatkozóan Fuchs [1] bizonyított tételt.

2. Lemma. [4] Legyen $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha, \beta}$, és $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ a $\{b_n\}$ (λ, μ) áttrendezettje. Ekkor $z = x + iy$ és $r = |z|$ jelölések mellett a

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - z}{b_n + z} e^{\frac{2z}{b_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \right)^{\mu_n} e^{\frac{2z\mu_n}{\lambda_n}}, \quad \Re z = x \geq 0$$

függvény analitikus $\Re z = x > 0$ tartományon, és csak a $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$ sorozat elemein tűnik el. Emellett léteznek A_1, A_2 konstansok, hogy

$$|H(z)| \leq e^{2xm_{\Lambda}(r) + A_1 x}, \quad \text{ha } \Re z > 0;$$

illetve

$$|H(z)| \geq e^{2xm_{\Lambda}(r) - A_2 x}, \quad \text{ha } \Re z > 0, \text{ és } |z - b_n| \geq \frac{e^{-a_n^{\beta}}}{3}.$$

A lemma igaz $\Re z = x = 0$ esetén is. A bevezetett jelölésekkel:
létezik $C_1, C_2 > 0$, hogy

$$|H(z)| \leq (C_1 \Psi_\Lambda(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0;$$

illetve

$$|H(z)| \geq (C_2 \Psi_\Lambda(r))^x, \text{ ha } \Re z \geq 0 \text{ és } |z - b_n| \geq \frac{e^{-a_n^\beta}}{3}.$$

Poisson-integrálformula

3. Lemma. *Ha $u(t)$ valós értékű, majdnem mindenütt folytonos és korlátos függvény, akkor az*

$$f(z) := f(x + iy) = \frac{x - a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(x - a)^2 + (y - t)^2} dt$$

függvény harmonikus a $\Re z = x > a$ félsíkon.

Ez a $\Re z > a$ félsíkon vett *Poisson-integrálformula.*

Mellin-transzformáció

7. Definíció. f függvény Mellin-transzformáltjának nevezzük a

$$\phi(z) = \{\mathcal{M}f\}(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} f(t) dt$$

függvényt. Az inverz transzformáció:

$$f(t) = \{\mathcal{M}^{-1}\phi\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} \phi(z) dz.$$

4. Lemma. Ha $f(t)$ függvény Mellin-transzformáltja $\phi(z)$, akkor $f(t) \ln t$ függvény Mellin-transzformáltja $\frac{d}{dz} \phi(z)$.

5. Lemma. *Ha $f(t)$ függvény Mellin-transzformáltja $\phi(z)$, akkor $z = x + iy$ jelöléssel*

$$\int_0^{\infty} t^{2x-1} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(z)|^2 dy.$$

Az 5. lemma a *Parseval-egyenlőség* a Mellin-transzformációra.

A Mellin-transzformáció nem csak esetünkben hasznos eszköz.

1. tétel

Bizonyítás vázlata: Cél: mutatni egy megfelelő $\Phi \in L_w^{2*}(0, \infty)$ nemtriviális korlátos lineáris funkcionált. Riesz reprezentációs tétele:

$$\Phi(\hat{g}) = \int_0^\infty \hat{g}(t) \hat{n}(t) w^2(t) dt,$$

megkonstruáljuk $\hat{n}$ -t.

Legyen $f(-r) = f(r)$.

$z = x + iy$, $r = |z|$ jelölés mellett legyen

$$p(z) = p(x + iy) := 2 \cdot \frac{x + a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x + a)^2 + (t - y)^2} dt,$$

$p(z)$ függvény harmonikus ha $\Re z = x > -a$, illetve feltehető, hogy $f > 0$.

Mivel p harmonikus, ezért létezik olyan q , hogy $-p + iq$, és így

$$g(z) := e^{-p+iq}$$

reguláris függvény $\Re z > -a$ esetén.

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - z}{b_k + z} e^{\frac{2z}{b_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + z} \right)^{\mu_k} e^{\frac{2z\mu_k}{\lambda_k}}, \text{ ha } \Re z = x \geq 0.$$

$$\lambda_k \leftrightarrow \lambda_k + a:$$

$$H^*(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k + a - z}{\lambda_k + a + z} \right)^{\mu_k} e^{\frac{2z\mu_k}{\lambda_k + a}}.$$

$H^*(z)$ reguláris, ha $\Re z > 0$.

$$G(z) := \frac{g(z+a)H^*(z+a)}{b(z)C_1^{z+a}}.$$

$$t\nu(t)u(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} t^{-z} dz, \text{ ha } \Re z \geq -a,$$

Paraméterezzünk $z = x + iy$ -nal, ahol $-\infty < y < \infty$:

$$t\nu(t)u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(z)}{(1+a+z)^2} t^{-z} dy.$$

Egyszerűen látható, hogy az integrál független x -től.

$$n(t) := \frac{\nu(Ct)u(Ct)}{w^2(t)}.$$

Megmutatható, hogy $n(t) \in L_w^2(0, \infty)$. Riesz reprezentációs tétele: minden $f \in L_w^2$ esetén legyen

$$\Phi(f) = \int_0^\infty f(t)n(t)w^2(t) dt.$$

Φ korlátos, ugyanis $|\Phi(f)| \leq \|f\|_{2,w} \|n\|_{2,w}$.

A bizonyítás utolsó lépése: Φ eltűnik

$\{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \dots, \mu_k - 1\}_{k=1}^\infty$ elemein.

Φ tehát megfelelő lineáris funkcionál, így S nem sűrű. $\square$

2. Tétel. Legyen w pozitív és folytonos $(0, \infty)$ -en úgy, hogy w^2 momentumai végesek, $\mathbf{A} = \{a_k\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha, \beta}$, melynek (λ, μ) átrendezettje $\{\lambda_n, \mu_n\}$. Ha van monoton növekvő h függvény $[0, \infty)$ -en, melyre

- ▶ létezik $0 < C, E$, hogy $C < \frac{h(r)}{h(r_1)} < E$, amint $\frac{1}{2} \leq \frac{r}{r_1} \leq 2$;
- ▶ létezik $\alpha, C, c > 0$, hogy minden $0 < x \leq r$ esetén

$$0 < h(r) \leq C^{\frac{1}{\alpha}} \frac{cx}{\varphi^{\alpha}(x)} \Psi_{\Lambda}^{\alpha}(r);$$

- ▶ valamint

$$\int_1^{\infty} \frac{h(r)}{r^2} dr = \infty,$$

akkor $S = \text{span} \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \dots, \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$ sűrű $L_w^2(0, \infty)$ -en.

6. Lemma (Fuchs). [1] Ha h nemnegatív, monoton növekvő függvény $(0, \infty)$ -en úgy, hogy teljesíti az előző feltételeket, és $z = x + iy$, $r = |z|$ jelölés mellett létezik $\Re z = x \geq 0$ tartományon reguláris g függvény, melyre $C, c, \alpha > 0$ esetén

$$|g(z)| \leq C \left(\frac{cx}{h(r)} \right)^{\frac{x}{\alpha}}$$

teljesül, akkor $g \equiv 0$ $\Re z \geq 0$ -n.

Bizonyítás vázlata: Tegyük fel indirekt, hogy S nem sűrű $L_w^2(0, \infty)$ -en. Ekkor létezik $\phi \in L_2^{w*}(0, \infty)$ nemtriviális korlátos lineáris funkcionál, amely S elemein nullává válik.

Riesz reprezentációs tétele: létezik $\hat{h}$ nem azonosan 0 függvény, hogy $h \in L^2_w$, és ϕ a következő alakban írható:

$$\phi(f) = \int_0^\infty f(t) \hat{h}(t) w^2(t) dt$$

A fentiek szerint ez eltűnik S elemein, speciálisan a $\Re z = x \geq 0$ tartományon definiált reguláris

$$G(z) := \int_0^\infty t^z \hat{h}(t) w^2(t) dt$$

is teljesíti a $G(\lambda_k) = 0, k = 1, 2, \dots$ egyenlőségeket.

$$g(z) := \frac{G(z)}{H(z)C_1^{z+1}},$$

ahol H :

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - z}{b_k + z} e^{\frac{2z}{b_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + z} \right)^{\mu_k} e^{\frac{2z\mu_k}{\lambda_k}}, \text{ ha } \Re z = x \geq 0.$$

Megmutatható, hogy $g \equiv 0$, ekkor $G \equiv 0$ minden z -re. Így $\hat{h}(t) \equiv 0$, de ekkor $\phi(f) \equiv 0$ minden $f \in L_w^2$ esetén, ami ellentmondás.

Így a kezdeti feltevésünk helytelen volt, vagyis S sűrű. $\square$

3. Tétel. Legyen w megengedett és normális súlyfüggvény $(0, \infty)$ -n, $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha, \beta}$, melynek (λ, μ) áttrendezettje $\Lambda = \{\lambda_n, \mu_n\}$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik $h(r)$ monoton növekvő függvény $[0, \infty)$ -en, melyre

- ▶ létezik $0 < C, E$, hogy $C < \frac{h(r)}{h(r_1)} < E$, amint $\frac{1}{2} \leq \frac{r}{r_1} \leq 2$;
- ▶ létezik $\alpha, C, c, k > 0$, hogy minden $0 < x \leq r$ esetén

$$\frac{1}{k} x \ln \frac{\Psi_{\Lambda}(r)}{\varphi(x)} \leq h(r) \leq C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi^{\alpha}(x)} \Psi_{\Lambda}^{\alpha}(r).$$

Ekkor $S = \text{span} \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \dots, \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$ akkor és csak akkor sűrű $L_w^2(0, \infty)$ -n, ha

$$\int_1^{\infty} \frac{h(r)}{r^2} dr = \infty.$$

A 2. tétel általánosítható $L_w^p(0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$ és $C_w(0, \infty)$ terekre is.

$$\varphi_p(x) := \left(\int_0^\infty t^{px} w^p(t) dt \right)^{\frac{1}{px}}, \quad x > 0, \quad 1 \leq p < \infty;$$

illetve

$$\varphi_C(x) = \left(\sup_{t>0} t^x w(t) \right)^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

A terek definíciói:

$$L_w^p(0, \infty) = \{f \mid \|fw\|_{p,(0,\infty)} < \infty\},$$

valamint

$$C_w(0, \infty) = \left\{ f \in C(0, \infty) \mid \lim_{t \rightarrow 0+, \infty} f(t)w(t) = 0 \right\}.$$

4. Tétel. Legyen w pozitív és folytonos súlyfüggvény $(0, \infty)$ -en, és tegyük fel, hogy $t^x w(t) \in L^p(0, \infty)$ (minden $a > 0$ -ra $\lim_{t \rightarrow 0+, \infty} t^a w(t) = 0$). Legyen $\mathbf{A} = \{a_n\} \in \mathbf{L}(c, D)$, $\mathbf{B} = \{b_n\} \in \mathbf{A}_{\alpha, \beta}$. Ekkor, ha létezik monoton növekvő h függvény $(0, \infty)$ -en, amelyre

- ▶ létezik $0 < C, E$, hogy $C < \frac{h(r)}{h(r_1)} < E$, amint $\frac{1}{2} \leq \frac{r}{r_1} \leq 2$;
- ▶ létezik $\alpha, C, c > 0$, hogy minden $0 < x \leq r$ esetén

$$0 < h(r) \leq C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi_p^\alpha(x)} \Psi_\Lambda^\alpha(r) \quad \left(0 < h(r) \leq C^{\frac{1}{x}} \frac{cx}{\varphi_C^\alpha(x)} \Psi_\Lambda^\alpha(r) \right);$$

- ▶ illetve

$$\int_1^\infty \frac{h(r)}{r^2} dr = \infty,$$

akkor S sűrű $L_w^p(0, \infty)$ -en ($C_w(0, \infty)$ -en).

Összefoglalás, kitekintés

Müntz-típusú tételeket bizonyítottunk súlyozott $L_2(0, \infty)$ téren az

$$S = \{t^{\lambda_k} \ln^l t \mid l = 0, 1, \dots, \mu_k - 1\}_{k=1}^{\infty}$$

altérre vonatkozólag, ahol $\{\lambda_k, \mu_k\}$ egy multiplicitással ellátott sorozat, w pedig megengedett súlyfüggvény.

A 2. tétel kimondható $L_w^p(0, \infty)$ és $C_w(0, \infty)$ téren is, az 1. tétel azonban csak $L_w^2(0, \infty)$ téren igazolt.

További célok:

- ▶ általánosabb eszközök használata ($L_w^p(0, \infty)$, illetve $C_w(0, \infty)$ -beli változatok);
- ▶ „normális” súlyfüggvény fogalmának kiküszöbölése.

-  W. H. J. Fuchs, *On the Closure of $\{e^{-t}t^{\alpha_\nu}\}$* , Proc. Cambr. Phil. Soc. **42** (1946), 91–105.
-  Á. P. Horváth, *Müntz-type Theorems on the Half-line with Weights*, arXiv: 1009.5777.
-  F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Dover Publications, Inc, 1990.
-  E. Zikkos, *Completeness of an Exponential System in Weighted Banach Spaces and Closure of its Liner Span*, J. Approx. Theory **146** (2007), 115–148.

Köszönöm a figyelmet!